Il teorema dei quattro colori

Riccardo Cristoferi

È un esempio di matematica che parte da esigenze pratiche (colorare la mappa delle contee inglesi) e risolve il problema con metodi grafici. Di facile comprensione, si può introdurre facilmente in classe. Possibili correlazioni con la geografia e l'arte.

Collegamenti intra e interdisciplinari

I grafi

Formula di Eulero

Ragionamento per induzione

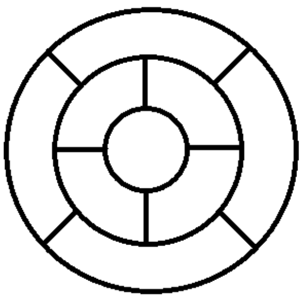
Congettura (teorema?) dei 4 colori

Tassellazioni del piano (arte)

Parole chiave: grafi, colorazioni, formula di Eulero, teorema dei quattro colori.

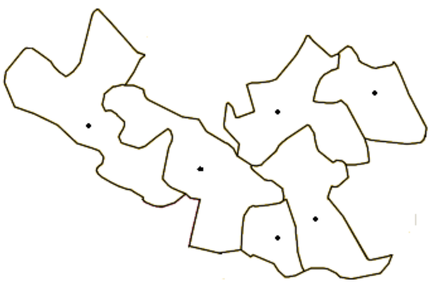
Problema: quanti colori servono per colorare una mappa in maniera tale che due regioni confinanti non abbiano lo stesso colore?

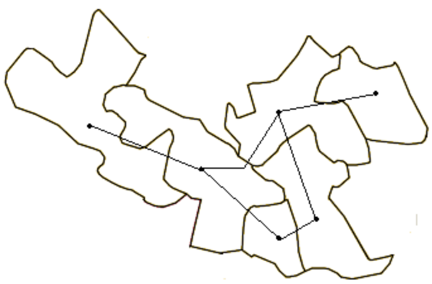
Consideriamo le seguenti mappe.

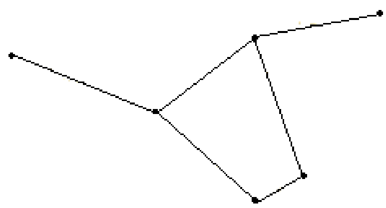


Nessuna può essere colorata con 3 colori, ma con un bel po' di pazienza con 4 si può fare.
Ma allora sarà sempre possibile colorare come voluto una qualsiasi mappa con 4 colori o siamo noi incapaci di trovare una mappa talmente complicata che necessita di più colori?

Innanzitutto cerchiamo di tradurre il problema in un linguaggio matematico. Dato che le uniche informazioni che ci interessano sono quali regioni ci sono e con chi confinano, data una cartina possiamo 'stilizzarla' come segue: facciamo un punto all'interno di ogni regione e collegiamo due regioni confinanti con una linea che passa lungo il confine, così che due linee non si possano mai intersecare.



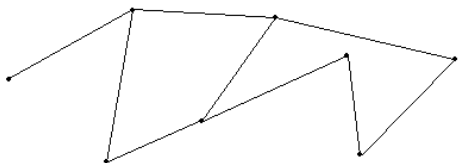




Quello che otteniamo è ciò che in matematica si chiama **grafo planare**: un insieme di punti (**vertici**) collegati da alcune linee (**lati**) che non si intersecano tra di loro. Come abbiamo visto sopra, da ogni mappa è possibile ottenere un grafo planare. Inoltre è facile vedere che dato un grafo planare possiamo costruire una mappa il cui grafo planare è proprio quello dato.

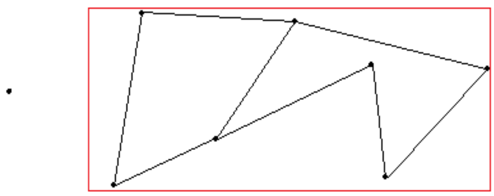
Quindi il nostro problema si traduce come: quanti colori servono per colorare i vertici di un grafo planare in maniera tale che due vertici collegati non abbiano lo stesso colore?

Quello che vogliamo fare ora è dimostrare che servono *al più* 5 colori (cioè si può 5-colorare).
Questo risultato fu provato nel 1890 da Heawood nel tentativo di risolvere il famoso **problema dei 4 colori** partendo dalle idee dell'avvocato e matematico amatore **Alfred Kempe**.
Innanzitutto, dato un grafo planare, chiamiamo **faccia** una qualsiasi porzione di piano che è delimitata dai lati del grafo (anche la zona di piano illimitata esterna al grafo è una faccia).

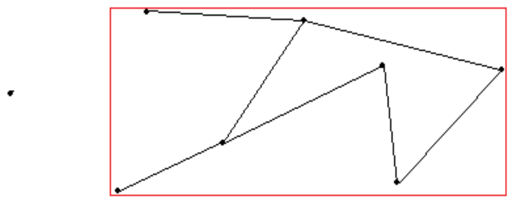


Grafo con 3 facce, 8 vertici e 9 lati

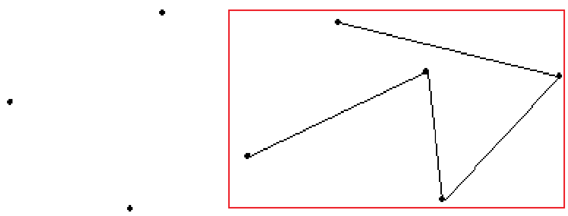
Una cosa che possiamo notare dei grafi planari nei quali è sempre possibile passare da un vertice ad altro spostandosi lungo i lati (detti grafi **connessi**) è che esiste una relazione matematica tra il numero di lati, di vertici e di facce. Infatti se noi prendiamo uno qualsiasi di questi grafi, notiamo che ogni volta che togliamo un lato in maniera tale che il grafo rimanente sia ancora connesso, allora o sparisce una faccia, o un vertice viene 'staccato' dal resto del grafo. Se noi togliamo tutti i lati, alla fine otterremo un solo vertice e una sola faccia (quella esterna).



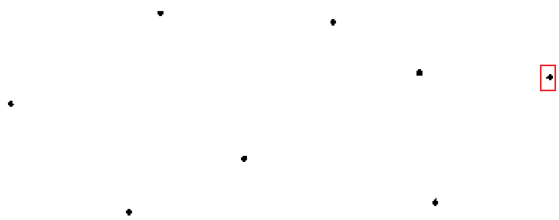
3 facce, 8 lati, 7 vertici



2 facce, 7 lati, 7 vertici



1 faccia, 4 lati, 5 vertici

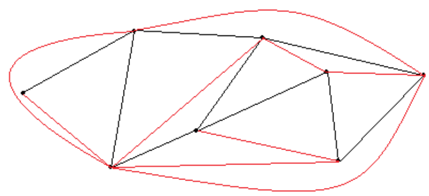


1 faccia, 0 lati, 1 vertice

Quindi il numero di lati è uguale alla somma del numero di vertici e facce, meno le due rimanenti alla fine, ovvero:

$$\boxed{\text{vertici} + \text{facce} - \text{lati} = 2}$$

Tale formula è nota come **relazione di Eulero.**
Questa relazione ci serve per dimostrare che in ogni grafo planare connesso c'è almeno un vertice che è collegato con *al più* 5 vertici. Per dimostrarlo ragioniamo come segue: prendiamo il nostro grafo, e aggiungiamo se necessario dei lati in maniera tale che ogni faccia (anche quella esterna) sia delimitata da 3 lati.
Questo tipo di grafi ha più lati per ogni vertice, quindi se dimostriamo l'affermazione per questo tipo di grafi, varrà a maggior ragione per quello



originale. Ora in questo tipo di grafi, ad ogni faccia corrispondono 3 lati, ma ogni lato è condiviso da 2 facce, e quindi vale che: 3 x facce = 2 x lati. Se usiamo questa uguaglianza nella relazione di Eulero (dove abbiamo moltiplicato entrambi i membri dell'uguaglianza per 6) si ha che: 6 x vertici – 2 x lati = 12.
Se chiamo v_i il numero di vertici da cui escono i lati, ottengo che la quantità

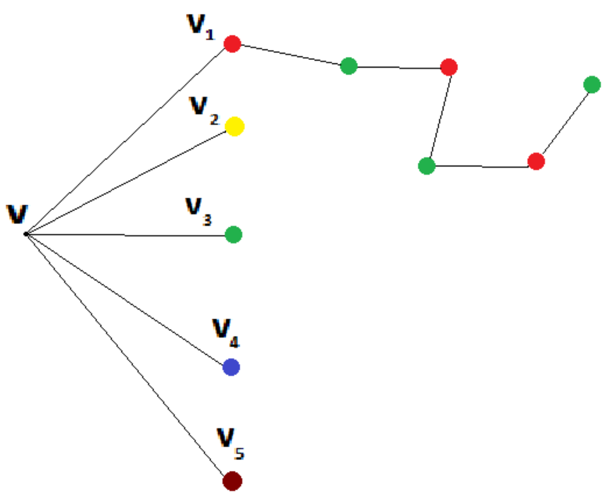
$$1 \times v_1 + 2 \times v_2 + 3 \times v_3 + 4 \times v_4 + \ldots + N \times v_N$$

è pari a 2 x lati, dato che ogni lato collega due vertici. Quindi: 6 x vertici – 2 x lati = 12 diventa

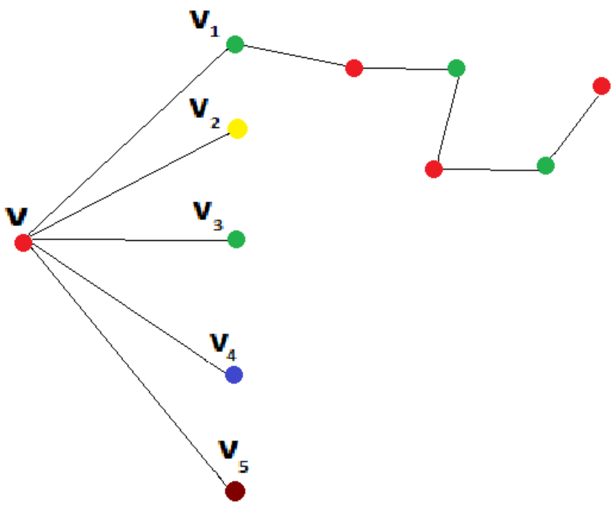
$$6 \times [v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + \ldots + v_N] - [1 \times v_1 + 2 \times v_2 + 3 \times v_3 + 4 \times v_4 + \ldots + N \times v_N] = 12.$$

Ne segue che almeno uno tra v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 deve essere diverso da zero, altrimenti la quantità a sinsitra dell'equazione di sopra sarebbe negativa, mentre a destra abbiamo 12, che è positivo. Abbiamo quindi dimostrato quanto voluto.

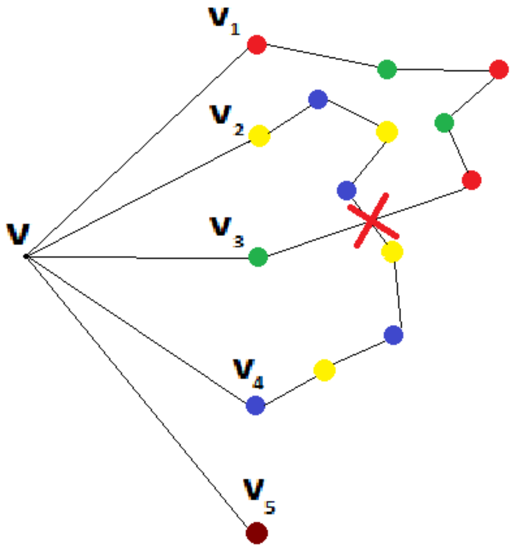
Ora il nostro ragionamento è il seguente: descriviamo una tecnica che permette di 5-colorare una mappa con n vertici se si sa 5-colorare una mappa con n-1 vertici. Dato che se una mappa ha meno di 5 vertici è chiaramente possibile 5-colorarla, allora se ad esempio ho una mappa con 8 vertici faccio come segue: prendo 5 dei suoi verici e li 5-coloro; poi considero un sesto vertice e uso la tecnica per 5-colorare i 6 vertici, e via così finchè non 5-coloro tutta la mappa. Un tale ragionamento si chiama **ragionamento per induzione**.
Prendiamo quindi una qualsiasi mappa e consideriamone il suo grafo planare di n vertici, con n>5. Per il risultato di sopra sappiamo che c'è un vertice v che è collegato con al più 5 vertici. Togliamo questo vertice e tutti i lati ad esso collegati. Otteniamo quindi un grafo con n-1 vertici, che supponiamo di saper 5-colorare. Ora ci sono due casi: se il vertice v era collegato con 1, 2, 3 o 4 vertici, o con 5 vertici ma con almeno un colore ripetuto, allora posso colorare v con uno dei colori che non sono stati utilizzati per colorare i vertici a cui era collegato. Riesco quindi a 5-colorare l'intera mappa.
Se v era collegato con 5 vertici tutti di colore diverso ragiono come segue:



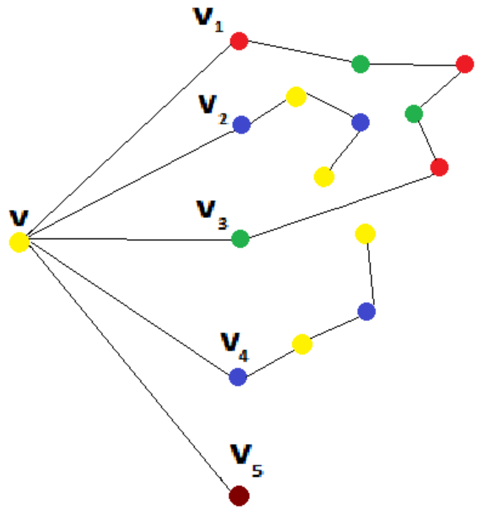
parto dal vertice rosso v_1 e mi sposto solo tra vertici adiacenti che sono rossi o verdi. Ottengo quindi una catena di vertici tutti rossi e verdi.



Scambio quindi il rosso con il verde.
Ora, se il vertice v_3 non è nella mia catena, vuol dire che che v_3 e v_1 sono colorati di verde, e quindi posso colorare il mio vertice v di rosso.



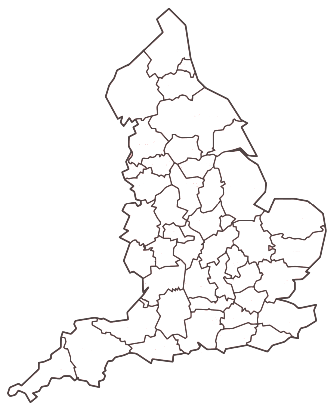
Se invece i vertici v_1 e v_3 sono collegati da una catena di vertici rossi e verdi, allora tale catena, unita ai lati congiungenti v_1 e v_3 con v, forma una curva che separa i vertici v_2 e v_4. Dato che le linee non si possono intersecare e i vertici della catena che circonda v_2 sono solo rossi o verdi, v_2 e v_4 non potranno essere collegati da una catena di vertici gialli e blu.



Quindi posso considerare una catena di soli vertici gialli e blu che parte da v_2 e scambiarne i colori. In tal modo il vertice v_2 sarà colorato di blu, e potrò quindi colorare il mio vertice v di giallo.

Ma rimane la **domanda**: bastano 4 colori o esiste una mappa che ne richiede 5?

Questo è quello che, nel 1852, si chiese uno studente di college, tale Francis Guthrie quando si accorse che poteva colorare come richiesto la mappa delle contee inglesi con soli 4 colori. Stupito di ciò provò a dimostrare che tale colorazione era possibile per qualsiasi mappa, ma non ci riuscì. Decise così di chiedere aiuto a suo fratello Frederick, studente di matematica, il quale lo propose al suo professore **Augustus de Morgan,** che introdusse il problema alla comunità scientifica. Passò un po' di tempo prima che i primi tentativi di dimostrazione iniziassero ad apparire: nel 1879 l'avvocato **Alfred Kempe** propose una 'dimostrazione' del problema dei quattro colori talmente convincente che fu fatto membro della **Royal Society**. Solo nel 1890 **Percy Heawood** trovò un errore nell'argomento di Kempe.
Passarono gli anni e molti furono i fallaci tentativi di dimostrazione, fino a che nel 1976 **Kenneth Appel** e **Wolfgang Haken** annunciarono di aver risolto il problema. La loro dimostrazione faceva uso di una variante della tecnica orginale di Kempe e di un approccio di dimostrazione sviluppato anni prima da **Heinrich Heesch**, che richiedeva un uso massicio del computer per fare delle operazioni che richiederebbero un tempo enorme per essere effettuate a mano (parliamo di centinaia di anni o forse più?). Per questo motivo molti matematici non credono molto nella dimostrazione di Appel e Haken, perché potrebbe esserci un errore nel programma che noi non siamo in grado di trovare.



Mappa delle contee ceremoniali inglesi. Provate a colorarla con solo 4 colori!

E voi, credereste ad una dimostrazione che utilizza un programma al computer?

Approfondimenti

Caratteristica di Eulero: http://www.matematita.it/personali/index.php?blog=6&cat=82

Tassellazioni del piano: http://it.wikipedia.org/wiki/Tassellatura